PART2 平面上の点の運動

要点整理と公式

要点 ① 平面上の点の運動

座標平面上を運動する点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。x，y が，時刻 t の関数として

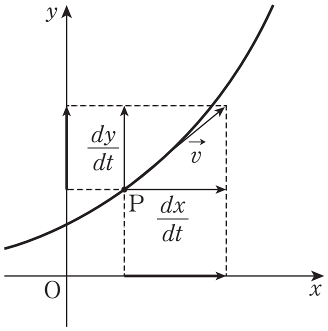
$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

と表されるとき，座標 x，y の時刻 t における微分係数

$$\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad \frac{dy}{dt}=g'(t)$$

を，それぞれ点Pの x 軸方向の速度，y 軸方向の速度といい，これらの組

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$



を，時刻 t における点Pの「　　　」または「　　　　　　」といい，　　と表す。また，速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ を，時刻 t における点Pの「　　　」という。

さらに，x 軸方向の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ と y 軸方向の加速度 $\frac{d^2y}{dt^2}$ の組

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

を，時刻 t における点Pの「　　　」または「　　　　　　」といい，　　と表す。また，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ である。

速度と加速度

座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ の，時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，点Pの時刻 t における

速度 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$　　速さ $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

加速度 $\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$　　加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

(ex) 時刻 t における点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=2t$，$y=2t^2-t+1$ で表されるとき，

$\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=4t-1$ より，時刻 t における点Pの

速度 $\vec{v}=(2,\ 4t-1)$　　　速さ $|\vec{v}|=\sqrt{(2)^2+(4t-1)^2}=\sqrt{16t^2-8t+5}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=4$ より，時刻 t における点Pの

加速度 $\vec{\alpha}=(0,\ 4)$　　　加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(0)^2+4^2}=4$

要点 ② 等速円運動

座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t$$

で表されるとき，時刻 t における点Pの速さ，加速度の大きさを求める。

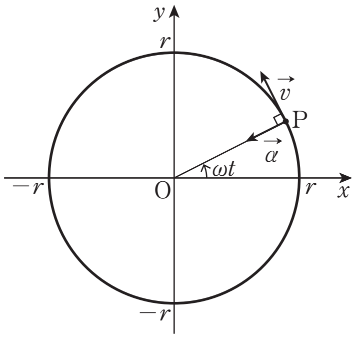
$\dfrac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t$，$\dfrac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t$ より，速さ $|\vec{v}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2+(r\omega\cos\omega t)^2}=\sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=r\omega$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-r\omega^2\sin\omega t$ より，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-r\omega^2\cos\omega t)^2+(-r\omega^2\sin\omega t)^2}=\sqrt{r^2\omega^4(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}=r\omega^2$$

点Pは，円 $x^2+y^2=r^2$ の周上を動き，その速さは $r\omega$ で　　　である。このように，円周上を運動する点Pの速さが一定であるとき，点Pの運動を「　　　」といい，ω を角速度という。



一般に，等速円運動する点Pの加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは点Pから円の中心に向かう向きである。また，加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は，速度ベクトル $\vec{v}$ と垂直である。

2 時刻 t における点Pの座標 (x, y) が次の式で与えられるとき，点Pの時刻 t における速度，速さ，加速度，加速度の大きさを求めよ。

(1) $x=e^t+e^{-t}$，$y=e^t-e^{-t}$

(2) $x=2\cos\frac{\pi}{3}t$，$y=2\sin\frac{\pi}{3}t$

Point Pickup

速度と加速度

座標平面上を運動する点Pの座標 (x, y) が，時刻 t の関数として表されているとき

速度 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$　　速さ $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

加速度 $\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$　　加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

第14講 PART2 確認問題

1 時刻 t における点Pの座標 $(x,\ y)$ が

$$x=2t-1,\quad y=t^2-t$$

で与えられる。このとき，時刻 t における点Pの速さは

$\sqrt{\boxed{ア}t^2-\boxed{イ}t+\boxed{ウ}}$ である。また，時刻 t における

点Pの加速度は $\vec{\alpha}=\left(\boxed{エ},\ \boxed{オ}\right)$，加速度の大きさは

$\boxed{カ}$ である。

2 時刻 t における点Pの座標 $(x,\ y)$ が

$$x=2\cos 3t,\quad y=2\sin 3t$$

で与えられる。このとき，点Pの速さは $\boxed{キ}$ であり，

加速度は $\vec{\alpha}=\boxed{ク}$，加速度の大きさは $\boxed{ケコ}$ である。

$\boxed{ク}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $(-6\sin 3t,\ 6\cos 3t)$
② $(18\sin 3t,\ 18\cos 3t)$
③ $(18\cos 3t,\ 18\sin 3t)$
④ $(-18\cos 3t,\ -18\sin 3t)$

PART2 平面上の点の運動

2 時刻 t における点Pの座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，点Pの時刻 t における速度，速さ，加速度，加速度の大きさを求めよ。

(1) $x=e^t+e^{-t}$，$y=e^t-e^{-t}$　　(2) $x=2\cos\dfrac{\pi}{3}t$，$y=2\sin\dfrac{\pi}{3}t$

[解答]

速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

(1) $\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$，$\dfrac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$ より

$$\vec{v}=(e^t-e^{-t},\ e^t+e^{-t})$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+(e^t+e^{-t})^2}=\sqrt{e^{2t}-2+e^{-2t}+e^{2t}+2+e^{-2t}}=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^t+e^{-t}$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^t-e^{-t}$ より

$$\vec{\alpha}=(e^t+e^{-t},\ e^t-e^{-t})$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2+(e^t-e^{-t})^2}=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2}{3}\pi\sin\dfrac{\pi}{3}t$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2}{3}\pi\cos\dfrac{\pi}{3}t$ より

$$\vec{v}=\left(-\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3}t,\ \frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3}t\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\pi^2\left(\sin^2\frac{\pi}{3}t+\cos^2\frac{\pi}{3}t\right)}=\frac{2}{3}\pi$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{2}{9}\pi^2\cos\dfrac{\pi}{3}t$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{2}{9}\pi^2\sin\dfrac{\pi}{3}t$ より

$$\vec{\alpha}=\left(-\frac{2}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t,\ -\frac{2}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t\right)^2+\left(-\frac{2}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3}t\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{81}\pi^4\left(\cos^2\frac{\pi}{3}t+\sin^2\frac{\pi}{3}t\right)}=\frac{2}{9}\pi^2$$

第14講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：4，ウ：5，エ：0，オ：2，
カ：2

[解説]

速度を $\vec{v}$ とする。

$\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t-1$ より，

$$\vec{v}=(2,\ 2t-1)\ \text{[A]}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(2t-1)^2}$$

$$=\sqrt{\mathbf{4}t^2\mathbf{-4}t\mathbf{+5}}$$

また，$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$ より，

$$\vec{\alpha}=(\mathbf{0},\ \mathbf{2})$$

$$|\vec{\alpha}|=\mathbf{2}$$

[A]　速度と加速度
座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として表されているとき，

速度　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

速さ　$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

加速度　$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

加速度の大きさ

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

2

[正解] キ：6，ク：④，ケコ：18

[解説]

速度を $\vec{v}$ とする。[B]

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 3t\cdot(3t)'=-6\sin 3t$$

$$\frac{dy}{dt}=2\cos 3t\cdot(3t)'=6\cos 3t$$

より，$\vec{v}=(-6\sin 3t,\ 6\cos 3t)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-6\sin 3t)^2+(6\cos 3t)^2}$$
$$=\sqrt{36(\sin^2 3t+\cos^2 3t)}\ \text{[C]}$$
$$=\mathbf{6}$$

また，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-6\cos 3t\cdot(3t)'=-18\cos 3t\ \text{[D]}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-6\sin 3t\cdot(3t)'=-18\sin 3t$$

より，$\vec{\alpha}=(\mathbf{-18\cos 3t,\ -18\sin 3t})$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-18\cos 3t)^2+(-18\sin 3t)^2}$$
$$=\sqrt{18^2(\cos^2 3t+\sin^2 3t)}$$
$$=\mathbf{18}$$

[B]　速度
$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

[C]　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

[D]　加速度
$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$